第 2 节 奇偶数列问题—综合篇（★★★☆）

强化训练

1．（2023・全国模拟改・★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,n为奇数\\a_n+1,n为偶数\end{cases}$，若$3\le a_5\le 15$，则$a_1$的取值范围是_____.

答案：$[0,3]$

解析：给出a_5的范围，让求a_1的范围，故先寻找a_5和a_1的关系，a_5与a_1隔得近，直接逐项递推即可，

由题意，$a_2=2a_1$，$a_3=a_2+1=2a_1+1$，$a_4=2a_3=4a_1+2$，$a_5=a_4+1=4a_1+3$，

因为$3\le a_5\le 15$，所以$3\le 4a_1+3\le 15$，故$0\le a_1\le 3$.

2．（2022・山东威海模拟改・★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n=2k-1\\a_n,n=2k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$.

（1）求a_2，a_5的值；

（2）求数列$\{a_n\}$的前$2n$项和S_{2n}.

解：（1）（要求a_2和a_5，按递推公式逐项计算即可）

因为$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n=2k-1\\a_n,n=2k\end{cases}$，所以$a_2=a_1+1=2$，$a_3=a_2=2$，$a_4=a_3+1=3$，$a_5=a_4=3$.

（2）**解法 1：**（$\{a_n\}$的递推式分奇偶，故考虑把奇数项、偶数项分别列几项出来找规律，其中奇数项分别为 1，2，3，…，可猜想它们成等差数列，下面通过递推公式论证这一猜想，只需证$a_{2k+1}-a_{2k-1}$为常数 1）

由所给递推公式，$a_{2k+1}=a_{2k}=a_{2k-1}+1$，所以$a_{2k+1}-a_{2k-1}=1$，故$\{a_{2k-1}\}$构成首项、公差都为 1 的等差数列；

（再看偶数项，容易求得$a_6=a_5+1=4$，所以偶数项分别为 2，3，4，…，故猜想偶数项也成等差数列，下面给出证明，只需证$a_{2k+2}-a_{2k}$为常数 1）

因为$a_{2k+2}=a_{(2k+1)+1}=a_{2k+1}+1=a_{2k}+1$，所以$a_{2k+2}-a_{2k}=1$，故$\{a_{2k}\}$构成首项$a_2=2$，公差为 1 的等差数列；

所以$S_{2n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$

$$=n+\frac{n(n-1)}{2}\times 1+n\cdot 2+\frac{n(n-1)}{2}\times 1=n^2+2n.$$

解法 2：（数列$\{a_n\}$的递推式按奇偶分段，要求前$2n$项和，需分析奇数项和偶数项的规律，先把递推式中的$n=2k$和$n=2k-1$分别代进去看看）

因为$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n=2k-1\\a_n,n=2k\end{cases}$，所以$\begin{cases}a_{2k}=a_{2k-1}+1 & ①\\a_{2k+1}=a_{2k} & ②\end{cases}$，（观察发现消去$a_{2k}$，即可得到相邻奇数项的关系）

将①代入②得：$a_{2k+1}=a_{2k-1}+1$，从而 $a_{2k+1}-a_{2k-1}=1$，故 a_1，a_3，a_5，$\cdots$ 构成公差为 1 的等差数列，

（又由②知偶数项跟与之相邻的下一项相等，故求和时可按奇偶项分组）

所以 $S_{2n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1})=n\times 1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 1+n\times 2+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 1=n^2+2n$.

3.（2023·河北保定模拟改·★★★）已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+2}-a_n=4$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=a_n\cdot 2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：（1）（看到 $a_{n+2}-a_n=4$，想到分奇偶讨论求通项）

因为 $a_{n+2}-a_n=4$，所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项、偶数项分别构成公差为 4 的等差数列，

当 n 为奇数时，设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $k=\dfrac{n+1}{2}$，$a_n=a_{2k-1}=a_1+(k-1)\cdot 4=4k-2=4\cdot\dfrac{n+1}{2}-2=2n$；

当 n 为偶数时，设 $n=2k$，则 $k=\dfrac{n}{2}$，$a_n=a_{2k}=a_2+(k-1)\cdot 4=4k=4\cdot\dfrac{n}{2}=2n$；

综上所述，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=2n$.

（2）由（1）可得 $b_n=2n\cdot 2^{2n}=2n\cdot 4^n$，（数列 $\{b_n\}$ 为“等差×等比”，可用错位相减法求和）

所以 $\begin{cases} T_n=2\times 4^1+4\times 4^2+6\times 4^3+\cdots+2(n-1)\cdot 4^{n-1}+2n\cdot 4^n & ② \\ 4T_n=\qquad 2\times 4^2+4\times 4^3+6\times 4^4+\cdots+2(n-1)\cdot 4^n+2n\cdot 4^{n+1} & ③ \end{cases}$，

②−③得：$-3T_n=2\times 4^1+2\times 4^2+2\times 4^3+\cdots+2\times 4^n-2n\cdot 4^{n+1}=\dfrac{2\times 4^1(1-4^n)}{1-4}-2n\cdot 4^{n+1}=\dfrac{8(4^n-1)}{3}-2n\cdot 4^{n+1}$

$=\dfrac{8\times 4^n-8}{3}-2n\cdot 4^{n+1}=\dfrac{2\times 4^{n+1}-8-6n\cdot 4^{n+1}}{3}=\dfrac{(2-6n)\cdot 4^{n+1}-8}{3}$，

所以 $T_n=\dfrac{(6n-2)\cdot 4^{n+1}+8}{9}$.

4.（★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中 λ 为常数.

（1）证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$；

（2）若 $\lambda=4$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（1）（条件有 a_n 与 S_n 混搭的关系式，要证的是与 a_n 有关的结论，故进 n 相减，消去 S_n）

因为 $a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，所以 $a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$，两式相减得：$a_{n+1}a_{n+2}-a_na_{n+1}=\lambda S_{n+1}-1-(\lambda S_n-1)$，

所以 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\lambda a_{n+1}$，由题意，$a_n\neq 0$，所以 $a_{n+1}\neq 0$，故 $a_{n+2}-a_n=\lambda$.

（2）将 $\lambda=4$ 代入（1）的结论得 $a_{n+2}-a_n=4$，所以 $\{a_n\}$ 的奇数项、偶数项分别构成公差为 4 的等差数列，

（要求通项公式，可先分奇偶讨论分别求出 a_n，再汇总. 已知 a_1，故先求奇数项的通项）

当 n 为奇数时，设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{2k-1}=a_1+(k-1)\cdot 4=4k-3$ ①，

由 $n=2k-1$ 得 $k=\dfrac{n+1}{2}$，代入①得 $a_n=4\cdot\dfrac{n+1}{2}-3=2n-1$；

（再看 n 为偶数的情形，需先求出 a_2，可在 $a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$ 中取 $n=1$ 来算）

因为 $a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，所以 $a_1a_2=\lambda S_1-1$，故 $a_2=\dfrac{\lambda S_1-1}{a_1}=3$，

当 n 为偶数时，设 $n=2k$，则 $a_{2k}=a_2+(k-1)\times 4=4k-1$ ②，

由 $n=2k$ 可得 $k=\dfrac{n}{2}$，代入②得 $a_n=4\cdot\dfrac{n}{2}-1=2n-1$；

综上所述，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=2n-1$.

5.（2015•湖南卷•★★★★）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）证明：$a_{n+2}=3a_n$；

（2）求 S_n.

解：(1)（条件中有 a_n 和 S_n 混搭的关系式，要证的是 $a_{n+2}=3a_n$，故考虑退 n 相减，消去 S_n）

因为 $a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3$，所以当 $n\ge 2$ 时，$a_{n+1}=3S_{n-1}-S_n+3$，

故 $a_{n+2}-a_{n+1}=3S_n-S_{n+1}+3-(3S_{n-1}-S_n+3)=3a_n-a_{n+1}$，整理得：$a_{n+2}=3a_n$ ①，

（由于得到上式的过程是退了 n 的，所以它只在 $n\ge 2$ 时成立，故应单独验证 $a_3=3a_1$ 是否成立）

在 $a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3$ 中取 $n=1$ 可得 $a_3=3S_1-S_2+3=3a_1-(a_1+a_2)+3=2a_1-a_2+3=3=3a_1$，

所以当 $n=1$ 时，式①也成立，故 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+2}=3a_n$.

（2）由（1）知 $a_1,a_3,a_5,\cdots$ 是首项为 1，公比为 3 的等比数列，$a_2,a_4,a_6,\cdots$ 是首项为 2，公比为 3 的等比数列，

（数列 $\{a_n\}$ 的奇、偶项特征不同，故求和时应按奇、偶分组，能否恰好分完又由 n 的奇偶决定，故讨论）

当 n 为偶数时，设 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $k=\dfrac{n}{2}$，

$$S_n=S_{2k}=a_1+a_2+\cdots+a_{2k}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2k})$$

$$=\frac{1\times(1-3^k)}{1-3}+\frac{2\times(1-3^k)}{1-3}=\frac{3^k-1}{2}+\frac{2\times(3^k-1)}{2}=\frac{3\times(3^k-1)}{2}=\frac{3\times(3^{\frac{n}{2}}-1)}{2}=\frac{3\times[(\sqrt{3})^n-1]}{2};$$

（当 n 为奇数时，可以重复上述计算过程，但更简单的做法是补一项凑成偶数项，再把补的减掉）

当 n 为奇数时，设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $k=\dfrac{n+1}{2}$，

$$\text{则 } S_n=S_{2k-1}=S_{2k}-a_{2k}=\frac{3\times(3^k-1)}{2}-a_2\times 3^{k-1}=\frac{3\times(3^k-1)}{2}-2\times 3^{k-1}=\frac{3\times 3^k-3-4\times 3^{k-1}}{2}$$

$$=\frac{9\times 3^{k-1}-3-4\times 3^{k-1}}{2}=\frac{5\times 3^{k-1}-3}{2}=\frac{5\times 3^{\frac{n+1}{2}-1}-3}{2}=\frac{5\times 3^{\frac{n-1}{2}}-3}{2}=\frac{5\times(\sqrt{3})^{n-1}-3}{2};$$

综上所述，$S_n=\begin{cases}\dfrac{5\times(\sqrt{3})^{n-1}-3}{2},n为奇数\\ \dfrac{3\times[(\sqrt{3})^{n}-1]}{2},n为偶数\end{cases}$.